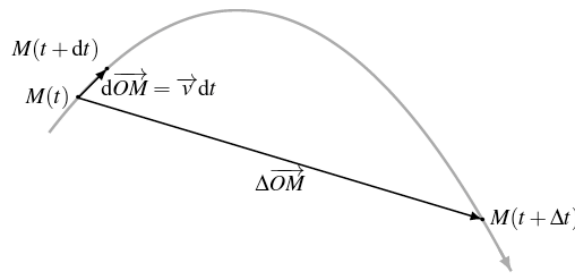


Chapitre 4 : Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

1. Travail et puissance d'une force

1. Vecteur déplacement élémentaire ou infinitésimal

Soit un point M de masse m animé d'un mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$.



Pour deux instants t et $t + \Delta t$, le point se trouve en $M(t)$ et $M(t + \Delta t)$. On définit ainsi le vecteur déplacement comme :

$$\overrightarrow{\Delta OM} = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

Pour deux instants très proches t et $t + dt$, on parle alors de déplacement infinitésimal ou élémentaire :

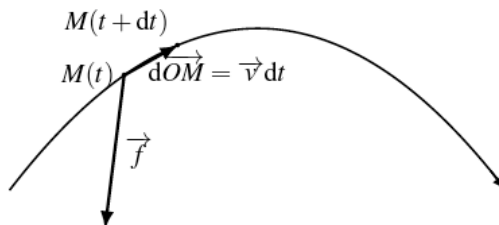
$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t + dt)}$$

Par définition, ce dernier est tangent à la trajectoire ce qui permet d'écrire :

$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t) \times dt$$

2. Puissance d'une force

Soit un point matériel M de masse m , animé d'un mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ et soumis à une force $\vec{f}$.



On définit la puissance de la force $\vec{f}$ comme le produit scalaire :

$$\mathcal{P}_{\vec{f}}(t) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(t)$$

Remarques :

- la vitesse dépendant du référentiel, la puissance d'une force également
- la puissance, tout comme le produit scalaire, est additive
- la puissance est une fonction du temps
- une puissance nulle correspond à $\vec{v} = \vec{0}$ (point immobile) ou $\vec{v} \perp \vec{f}$.
- une puissance s'exprime en Watt. L'analyse dimensionnelle donne :

$$[P] = [\vec{v}] \times [\vec{f}] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L \cdot T^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$$

$$\text{donc } 1 W = 1 kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$$

Suivant le signe de la puissance, on distingue :

- une puissance motrice ($\mathcal{P}_{\vec{f}} > 0$) significative d'une force dans le sens du mouvement à l'instant considéré
- une puissance résistante ($\mathcal{P}_{\vec{f}} < 0$) significative d'une force opposée au mouvement à l'instant considéré

3. Travail d'une force

On commence par définir le travail élémentaire d'une force entre deux instants t et $t + dt$ à partir de la puissance de celle-ci. Ainsi, pour une force $\vec{f}$ de puissance $\mathcal{P}_{\vec{f}}(t)$ appliquée au point M , on a :

$$\delta W_{\vec{f}} = \mathcal{P}_{\vec{f}}(t) \times dt$$

Si on tient compte des expressions de la puissance et du déplacement élémentaire, on a :

$$\delta W_{\vec{f}} = \mathcal{P}_{\vec{f}}(t) \times dt = \vec{f} \cdot \overrightarrow{v_{M/R}}(t) \times dt = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Remarques :

- le travail élémentaire représente la quantité d'énergie fournie par la force entre les deux instants ; la grandeur $W(t)$ n'existant pas, afin de signifier qu'il s'agit d'un travail élémentaire, on utilise un δ et non un d .
- suivant l'expression retenue, le travail élémentaire s'exprime en fonction du temps t ou de la position M .

On peut ainsi définir le travail d'une force entre deux points A et B de la trajectoire suivie par le point M . On a ainsi :

$$W_{\vec{f}}^{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} \quad \text{ou} \quad W_{\vec{f}}^{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t) dt$$

Le travail s'exprime en Joule. Par analyse dimensionnelle, on obtient :

$$[W] = [\mathcal{P}] \times T$$

$$\text{soit } 1 J = 1 W \cdot s.$$

Tout comme pour la puissance, on parle de travail moteur ($W > 0$) ou résistant ($W < 0$). Un travail nul correspond à un système immobile ou une force perpendiculaire à tout instant au vecteur vitesse (on parle alors d'une force qui ne travaille pas).

1.4. Exemples de calcul de travail

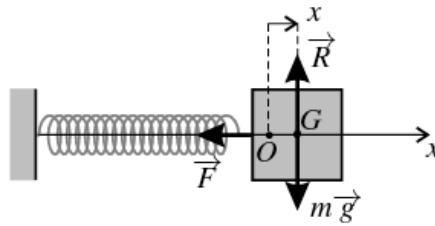
Exercice : Soit une particule de masse m en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$. Le repérage du point est effectué à l'aide du repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, l'axe (Oz) étant vertical ascendant. Établir l'expression du travail du poids entre deux points A et B .

Corrigé : Le poids est un vecteur constant quelque soit le trajet entre A et B . On a ainsi :

$$W_{\vec{p}}^{AB} = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{OM} = \vec{p} \cdot \int_A^B d\vec{OM} = \vec{p} \cdot \vec{AB}$$

$$W_{\vec{p}}^{AB} = \vec{p} \cdot \vec{AB} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix} = mg(z_A - z_B)$$

Exercice : Dans un référentiel $\mathcal{R}$, soit une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . Celle-ci est astreinte à se déplacer sans frottements sur un plan horizontal suivant l'axe (Ox) . Pour simplifier, on prend l'origine de l'axe confondu avec la position de repos de la masse. Établir l'expression du travail de la force de rappel du ressort entre deux points A et B .



Corrigé : on a :

$$W_{\vec{F}}^{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -kx\vec{u}_x \cdot dx\vec{u}_x = -k \int_A^B x dx$$

$$W_{\vec{F}}^{AB} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) = \frac{1}{2}k(\Delta l_A^2 - \Delta l_B^2)$$

Remarque : on peut noter que, dans ce cas précis, le poids et la réaction du support étant perpendiculaire au mouvement de la masse ne travaillent pas.

Exercice : Soient deux particules de masses respectives m_1 et m_2 dans un référentiel $\mathcal{R}$, celle de masse m_2 étant situé en O fixe dans $\mathcal{R}$. Le repérage du point est effectué à l'aide du repère en coordonnées sphériques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$. Établir l'expression du travail de la force gravitationnelle entre deux points A et B .

On notera :

$$r_A = \|\vec{OA}\| \quad \text{et} \quad r_B = \|\vec{OB}\|$$

Corrigé : La force gravitationnelle exercée par la particule de masse m_2 sur celle de masse m_1 a pour expression

$$\overrightarrow{F_{O \rightarrow M}} = -G m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

On a alors :

$$W_{\vec{F}}^{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F_{O \rightarrow M}} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Or :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \dot{r} dt = dr \\ r \dot{\theta} dt = r d\theta \\ r \sin(\theta) \dot{\phi} dt = r \sin(\theta) d\phi \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_{O \rightarrow M}} = \begin{vmatrix} -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\overrightarrow{F_{O \rightarrow M}} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} dr$$

Donc :

$$W_{\vec{F}}^{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{G m_1 m_2}{r^2} dr = \frac{G m_1 m_2}{r_B} - \frac{G m_1 m_2}{r_A}$$

Exercice : Soit une particule de masse m en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$. Établir l'expression du travail de la force de frottement fluide entre deux points A et B .

Corrigé : La force de frottement fluide a pour expression :

$$\vec{f} = -k_1 \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

$$W_{\vec{f}}^{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B -k \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} dt = -k_1 \int_{t_A}^{t_B} \left(v_{M/\mathcal{R}} \right)^2 dt$$

2. Théorème de l'énergie cinétique

2.1. Définition de l'énergie cinétique

Soit un point matériel M de masse m animé d'un mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. On définit l'énergie cinétique de M comme la grandeur E_c d'expression :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}}^2$$

On peut remarquer que la vitesse dépendant du référentiel d'étude, il est en de même pour l'énergie cinétique.

2.2. Énoncé du théorème

Soit un point matériel M de masse m animé d'un mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et allant de A à B entre deux instants t_A, t_B . La variation d'énergie cinétique entre A et B est égale au travail de toutes les forces subies par le point.

Démonstration : d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M dans $\mathcal{R}$, on peut écrire

$$\frac{d\overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}}{dt} = m \frac{d\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i$$

En multipliant toute l'équation par $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, nous obtenons :

$$m \frac{d\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{dt} \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \left(\sum_i \vec{f}_i \right) \cdot \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \Leftrightarrow \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \right)^2 = \sum_i \mathcal{P}_{\vec{f}_i} = \frac{dE_c}{dt}$$

Cette première formulation s'appelle loi ou théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_{\vec{f}_i}$$

On a par intégration

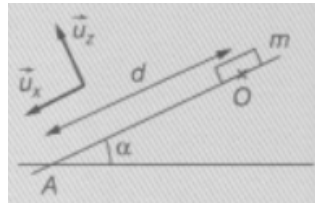
$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{dE_c}{dt} \times dt = \int_{t_A}^{t_B} \left(\sum_i \mathcal{P}_{\vec{f}_i} \right) \times dt$$

On obtient ainsi la seconde formulation appelée loi ou théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{\vec{f}_i}^{AB}$$

2.3. Exemple d'application

On considère un mobile assimilé à centre de gravité M , de masse m glissant sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On suppose que le glissement s'effectue sans frottement. Il est initialement posé immobile au point O puis glisse jusqu'en A sur une distance d .



Exercice : par application du théorème de l'énergie cinétique entre les instants initial et final où le mobile atteint le bas de la pente en A , notée v_A , établir l'expression de la norme de la vitesse au point A . Que peut-on remarquer ?

Corrigé :

Système : le mobile de masse m

Référentiel : terrestre galiléen

BAME : poids ($\vec{p} = m\vec{g}$), réaction du plan incliné ($\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$)

La loi de l'énergie cinétique s'écrit entre les points O et A :

$$\Delta E_c = E_c(A) - E_c(O) = W_p^{OA} + W_{R_N}^{OA}$$

Or, on peut écrire :

- $E_c(O) = 0$ puisque $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t=0) = 0$
- $E_c(A) = \frac{1}{2}mv_A^2$
- $W_{R_N}^{OA} = 0$ puisqu'à tout instant on a $\vec{v} \perp \vec{R}_N$
- $W_p^{OA} = \int_O^A \vec{p} \cdot d\vec{OM} = mgd \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mgd \sin(\alpha)$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mgd \sin(\alpha)$$

Finalement, on a :

$$v_A = \sqrt{2gd \sin(\alpha)}$$

On remarque qu'en l'absence de frottement, la vitesse en bas du plan incliné est indépendante de la masse du mobile.

3. Énergie potentielle et force conservative

3.1. Définition

On dit d'une force qu'elle est conservative si et seulement si son travail le long d'une quelconque trajectoire entre deux points A et B est indépendant du chemin suivi et ne dépend que des positions des points A et B .

Dans le cas d'une force conservative, on peut définir une fonction énergie potentielle ne dépendant que des variables de position telle que :

$$W_{\vec{f}}^{AB} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$$

Remarque : comme l'énergie potentielle est définie par sa variation, elle est donc déterminée à une constante additive près. Si E_p est une énergie potentielle possible, alors $E_p + K$ également. On lèvera cette indétermination par un choix judicieux d'une position pour laquelle $E_p = 0$ (on prendra fréquemment la position d'équilibre du système).

Au niveau élémentaire, nous pouvons donc écrire :

$$\delta W_{\vec{f}} = \vec{f} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$$

On dit alors que la force dérive de l'énergie potentielle. On note par ailleurs le lien mathématique avec la puissance de la force :

$$\delta W_{\vec{f}} = \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \vec{f} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} dt = \mathcal{P}_{\vec{f}} \times dt = -dE_p$$

soit

$$\mathcal{P}_{\vec{f}} = -\frac{dE_p}{dt}$$

Certaines forces ne sont pas conservatrices ; c'est le cas notamment des forces de frottement. Si on prend l'exemple des forces de frottement fluide pour lesquels le travail obtenu a pour expression :

$$W_{\vec{f}}^{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{OM} = -k_l \int_{t_A}^{t_B} \left(v_{M/\mathcal{R}} \right)^2 dt$$

Mise à part dans le cas d'un mouvement uniforme, la vitesse dépend le plus souvent du temps et ne peut sortir de l'intégrale. Le travail dépend ainsi du trajet menant de A à B .

3.2. Exemples d'énergie potentielle

✓ énergie potentielle de pesanteur :

On a obtenu précédemment que le travail du poids entre deux points A et B pour un système de masse m a pour expression :

$$W_{\vec{p}}^{AB} = mg(z_A - z_B) = E_p(A) - E_p(B)$$

On introduit ainsi pour énergie potentielle de pesanteur :

$$E_p(M) = mgz + cte$$

remarque : cette expression a été obtenue avec une axe (Oz) vertical ascendant. Dans le cas d'un axe descendant, on aurait :

$$E_p(M) = -mgz + cte$$

Il est à retenir que l'énergie potentielle de pesanteur croît avec l'altitude.

✓ énergie potentielle élastique :

On a obtenu précédemment que le travail de la force de rappel d'un ressort entre deux points A et B a pour expression :

$$W_{\vec{F}}^{AB} = \frac{1}{2} k (\Delta l_A^2 - \Delta l_B^2) = E_p(A) - E_p(B)$$

On introduit ainsi pour énergie potentielle élastique :

$$E_p(M) = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + cte = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + cte$$

✓ énergie potentielle gravitationnelle :

On a obtenu précédemment que le travail de la force gravitationnelle entre deux points A et B a pour expression :

$$W_{\vec{F}}^{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{Gm_1m_2}{r^2} dr = \frac{Gm_1m_2}{r_B} - \frac{Gm_1m_2}{r_A}$$

On introduit ainsi pour énergie potentielle gravitationnelle :

$$E_p(M) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + cte$$

✓ énergie potentielle électrique : d'une manière analogue à la force gravitationnelle, on montre que l'énergie potentielle associée à la force exercée par une particule de charge q_2 sur une particule de charge q_1 à une distance r a pour expression :

$$E_p(M) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$$

4. Théorème de l'énergie mécanique

4.1. Définition de l'énergie mécanique

Soit un point matériel M de masse m animé d'un mouvement à la vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. On définit l'énergie mécanique de M comme la grandeur E_m d'expression :

$$E_m = E_c + E_p$$

où E_c est l'énergie cinétique du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ et E_p la somme des énergies potentielles des forces conservatives auxquelles le système est soumis.

4.2. Énoncé du théorème

Soit un point matériel M de masse m dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et allant de A à B . La variation d'énergie mécanique entre A et B est égale au travail des forces non conservatives subies par le point.

Démonstration : Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au point M entre A et B .
On a

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{\vec{f}_i}^{AB} = -\sum_i \Delta E_{p_i} + W_{n.c}^{AB} = E_p(A) - E_p(B) + W_{n.c}^{AB}$$

Il vient alors

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{n.c}^{AB}$$

En considérant une transformation élémentaire, on obtient une autre formulation du théorème appelée théorème de la puissance mécanique : la dérivée de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non-conservatives.

Démonstration : Appliquons le théorème de la puissance cinétique au point M pour une transformation élémentaire entre les instants t et $t + dt$.

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{n.c} + \mathcal{P}_c = \mathcal{P}_{n.c} - \sum_i \frac{dE_{p_i}}{dt} = \mathcal{P}_{n.c} - \frac{dE_p}{dt}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{n.c}$$

4.3. Conservation de l'énergie mécanique

Dans le cas où le système n'est soumis qu'à des forces conservatives, on obtient alors que l'énergie mécanique du système est constante. On parle alors de système conservatif.

Certains systèmes ne sont soumis qu'à des forces conservatives ou des forces ne travaillant pas (la réaction d'un support, la tension d'un fil par exemple). On obtient alors également conservation de l'énergie mécanique. On parle de système pseudo-conservatif.

Pour un système conservatif ou pseudo-conservatif, l'énergie mécanique est ainsi une constante fonction de la position du système et de ses dérivées temporelles (vitesse, accélération). On dit de E_m qu'elle est une intégrale première du mouvement.

4.4. Exemples d'application

Voici deux façons d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique.

Exercice : reprendre l'exercice du mobile glissant sur un plan incliné en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.

Corrigé : On applique le théorème de l'énergie mécanique entre les points O et A . Comme, à tout instant, on a $\vec{R} \perp \vec{v}$, on a $\Delta E_m = 0$

On considère un axe vertical ascendant (AZ) et on choisit arbitrairement $E_p(A) = 0$

$$E_m(O) = E_c(O) + E_p(O) = \frac{1}{2}mv_O^2 + mgZ_O = mgd \sin(\alpha)$$

$$E_m(A) = E_c(A) + E_p(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + E_p(A) = \frac{1}{2}mv_A^2$$

La conservation de l'énergie mécanique implique : $E_m(A) = E_m(O)$

Soit

$$v_A = \sqrt{2gd \sin(\alpha)}$$

Exercice : on considère à nouveau la masse accrochée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k , de longueur à vide l_0 , et se déplaçant sans frottement sur un plan horizontal suivant l'axe (Ox). Obtenir l'équation horaire du mouvement $x(t)$ en utilisant l'énergie mécanique.

Corrigé :

Système : la masse m

Référentiel : terrestre galiléen

BAME :

- poids ($\vec{p} = m\vec{g}$)
- réaction du plan ($\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$)
- force de rappel du ressort $\vec{F} = -k x \vec{u}_x$

Le système est pseudo-conservatif puisque $\vec{R}$ ne travaille pas.

A un instant quelconque t , on a :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + mgz_o$$

Le théorème de la puissance mécanique nous donne :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{n.c} = 0$$

Soit :

$$m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + k x) = 0$$

On écarte la solution $\dot{x} = 0$ qui donnerait $x = Cte$. On obtient ainsi :

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique qui a pour solution

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

5. Mouvements et équilibres

La connaissance de l'énergie potentielle d'un système peut nous permettre de déduire qualitativement :

- s'il s'agit d'un mouvement périodique ou non
- si la trajectoire est bornée ou non
- les positions de vitesse nulle
- les positions d'équilibre et leurs stabilités

Nous travaillerons par la suite dans l'hypothèse d'un mouvement pouvant être décrit par la donnée d'un seul paramètre que nous noterons $x(t)$. Il peut s'agir par exemple :

- de l'angle θ dans le cas du pendule simple
- de l'abscisse x pour le mobile sur le plan incliné
- de l'allongement x du ressort pour la masse accrochée à un ressort horizontal

5.1. Positions d'équilibre

Le mouvement du système étant décrit par un seul paramètre $x(t)$, l'énergie potentielle ne dépendra que de x . Sa représentation graphique en fonction de x sera donc une courbe.

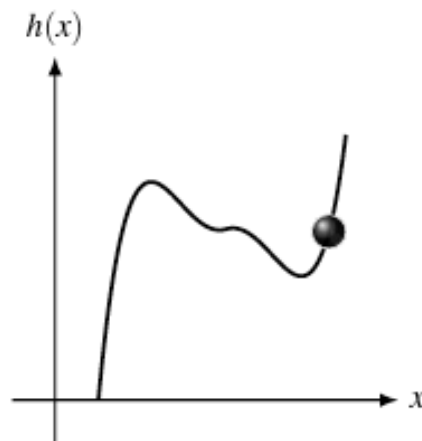
Pour comprendre la notion d'équilibre, on peut faire l'analogie avec un boulier pour enfant.



Une perle n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction de la tige, son énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = mgh$$

où $h = h(x)$ est l'altitude de la boule. À une constante multiplicative près, la représentation de l'énergie potentielle équivaut au profil de la tige.



Or, nous savons que :

- sans vitesse initiale, la perle glisse spontanément vers le fond du puits le plus proche
- la perle peut se trouver en équilibre au sommet d'une bosse ou le fond d'un puit (lieu de pente nulle)

On affirme ainsi que : pour un système conservatif ou pseudo-conservatif décrit par un unique paramètre x , les positions d'équilibre correspondent à un extremum local de l'énergie potentielle soit

$$\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_{eq}} = 0$$

5.2. Stabilité d'un équilibre

On peut distinguer différents types d'équilibres :

- équilibre stable : si la perle est écartée légèrement de sa position d'équilibre, elle y revient tout en oscillant autour ; c'est le cas lorsque la perle se trouve au fond d'un puit
- équilibre instable : si la perle est écartée de sa position d'équilibre, elle s'en éloigne ; c'est le cas lorsque la perle se trouve au sommet d'une bosse

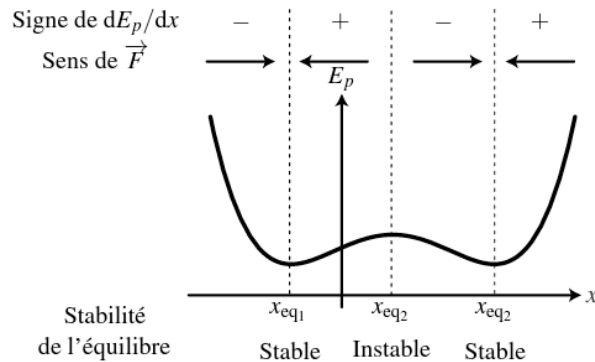
On déduit ainsi qu'on aura :

- une position d'équilibre stable si

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} > 0$$

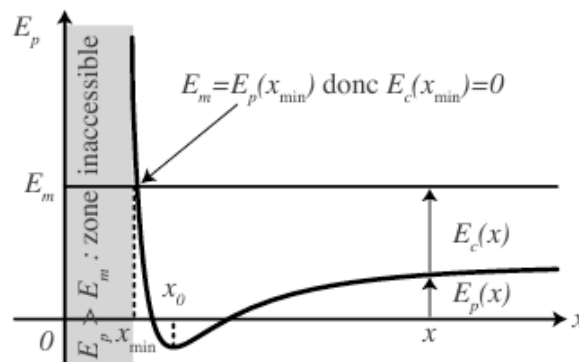
- une position d'équilibre instable si

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} < 0$$



5.3. Détermination qualitative de la trajectoire

On peut déterminer qualitativement le mouvement d'un système conservatif en traçant sur un même graphe l'énergie potentielle et l'énergie mécanique (qui, étant constante, correspond à une droite).



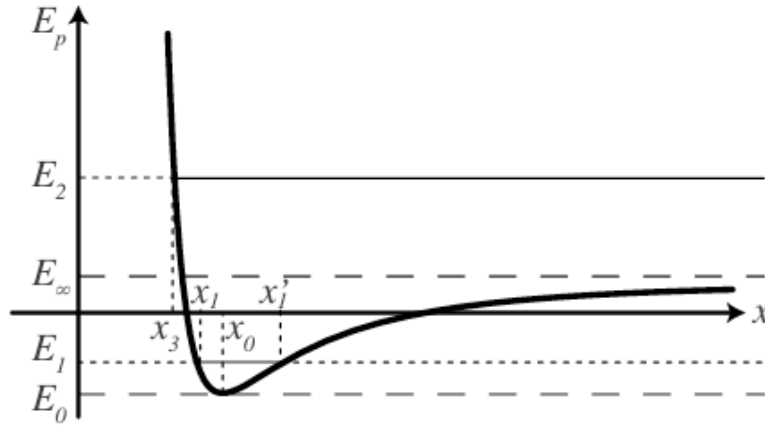
On a alors :

- comme $E_c \geq 0$ et $E_m = E_c + E_p$, on doit avoir $E_p \leq E_m$ ce qui définit l'intervalle des x accessible au système
- pour une abscisse x donnée, on peut déduire la vitesse grâce à E_c puisque $E_c(x) = E_m - E_p(x)$; on a alors

$$v(x) = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_p(x))}{m}}$$

- les points de vitesse nulle seront les points d'intersection de la courbe d'énergie potentielle avec la droite E_m

On peut alors distinguer différent mouvement :



- $E_m < E_0$: pas de mouvement possible
- $E_m = E_0$: le point matériel est en $x = x_0$ sans pouvoir bouger ($E_c = 0$)
- $E_0 < E_m < E_\infty$: le mouvement est borné entre deux abscisses x_1 et x_1' ; le système oscille autour de la position d'équilibre $x = x_0$ (où la vitesse sera maximale) effectuant un demi-tour en x_1 et x_1' (où la vitesse est nulle) ; on parle d'état lié.
- $E_m \geq E_\infty$: dans ce cas, la système peut évoluer pour des abscisses vérifiant $x \geq x_3$ et peut donc s'échapper à l'infini ; on parle d'état libre ou d'état de diffusion. La vitesse maximale est observée pour $x = x_0$.

5.4. Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable

Soit une position d'équilibre x_{eq} dont on écarte le système. On s'intéresse au mouvement dont on veut déterminer la nature. Pour cela, on exprime l'énergie mécanique du système.

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{M/\mathcal{R}}^2 + E_p(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x)$$

Au voisinage de la position d'équilibre, on peut écrire :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_{eq}} + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} = E_p(x_{eq}) + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}}$$

On a donc :

$$E_m \simeq \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_{eq}) + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}}$$

Le système étant conservatif, on a :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

Soit :

$$\dot{x} \left[m\ddot{x} + (x - x_{eq}) \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} \right] = 0$$

En écartant la solution sans intérêt $\dot{x} = 0$ et en posant :

$$u = x - x_{eq} \text{ et } k_{eff} = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} > 0$$

où k_{eff} est la constante de raideur effective, on obtient :

$$m\ddot{u} + k_{eff} u = 0$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}$. Le système effectue par conséquent des oscillations autour de la position d'équilibre stable.